Função com um único ponto crítico

1 Introdução

Sabemos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável que possui um único ponto crítico que é um ponto de mínimo local, então ele será um ponto de mínimo absoluto (na realidade, ele será o único ponto de mínimo dde f). Isto não é verdade para funções de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Essas notas visam elucidar tais fatos.

2 Funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Antes de estudarmos funções deriváveis, vejamos o que pode ser dito sobre funções contínuas.

Teorema 2.1 *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui as seguintes propriedades:*

1. *f é contínua,*
2. *f não possui máximos locais e*
3. *f possui um mínimo local,*

então tal mínimo local é o mínimo absoluto.

Demonstração: Seja $p \in \mathbb{R}$ um ponto de mínimo local de f. Suponha, por absurdo, que exista $q \in \mathbb{R}$, tal que $f(q) < f(p)$ (veja Figura 1).

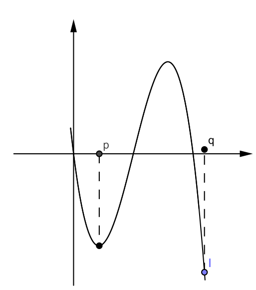

Figura 1: Os pontos p e q

Sem perda de generalidade, podemos supor que $p < q$. Por [1], sabemos que existe $r \in [p, q]$ tal que $f(r)$ é máximo de $f|_{[p,q]}$.
Certamente, $r \neq q$, pois$f(r) \geq f(p) > f(q)$.
Vejamos, também, que $r \neq p$. Para tanto, suponhamos, por absurdo (novamente), que $r = p$. Como $f(p)$ é máximo absoluto em $[p, q]$, $f(p) \geq f(x)$, $\forall x \in [p, q]$. Como $f(p)$ é mínimo local de f, existe $\epsilon > 0$, tal

que $f(p) \leq f(x)$, $\forall x \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$. Logo $f(x) = f(p)$ no intervalo $I = (p-\epsilon, p+\epsilon) \cap [p, q]$. O fato de f ser constante em I, nos diz que os pontos do interior de I são pontos de máximos locais de f, o que contradiz a hipótese.
Como $r \in [p, q]$ e $r \notin \{p, q\}$, então $\in (p, q)$, o que implica que $f(r)$ é máximo local de f, o que contraria, novamente a hipótese e, portanto, não existe tal ponto q.

□

Antes de falarmos em funções deriváveis, vejamos uma definição que será necessária. A definição de ponto de inflexão horizontal leve em conta a concavidade que pode ser caracterizada pela derivada segunda, embora a definição clássica de concavidade não necessite de diferenciabilidade. Como estamos lidando com funções deriváveis modificaremos a definição de ponto de inflexão.

Definição 2.1 *Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $p \in (a, b)$ é um ponto de inflexão generalizado, se existe $\epsilon > 0$ tal que uma das seguintes possibilidades acontece*

1. $f(x) < f(p)$, $\forall x \in (p-\epsilon, p)$ *e* $f(x) > f(p)$, $\forall x \in (p, p-\epsilon)$

   ou

2. $f(x) > f(p)$, $\forall x \in (p-\epsilon, p)$ *e* $f(x) < f(p)$, $\forall x \in (p, p-\epsilon)$.

Lema 2.1 *Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $p \in (a, b)$ é o único ponto crítico de f, então ou $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, p)$ ou $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, p)$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existam $r, q \in (a, p)$, tais que $f(r) \geq 0$ e $f(q) \leq 0$. Como f é o único ponto crítico, $f(r) > 0$ e $f(q) < 0$. Como f é derivável, por [2], sabemos que f possui a propriedade do valor intermediário, portanto existe $s \in (a, p)$ tal que $f'(s) = 0$. Isso contradiz o fato de p ser o único ponto crítico de f.

□

Analogamente, temos o seguinte lema.

Lema 2.2 *Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $p \in (a, b)$ é o único ponto crítico de f, então ou $f'(x) > 0$, $\forall x \in (p, b)$ ou $f'(x) > 0$, $\forall x \in (p, b)$.*

O demonstração do teorema seguinte é uma consequência imediata dos lemas 2.1 e 2.2.

Teorema 2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável. Se p é o único ponto crítico de f, então ou p é um ponto de inflexão horizontal generalizado ou p é um ponto de mínimo absoluto ou p é um ponto de máximo absoluto.*

O Teorema 2.2 acarreta no seguinte resultado.

Teorema 2.3 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e p o único ponto crítico de f. Se p é um mínimo local, então p é mínimo absoluto.*

Observemos que os teoremas dessa seção poderiam ser enunciados para funções $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$.

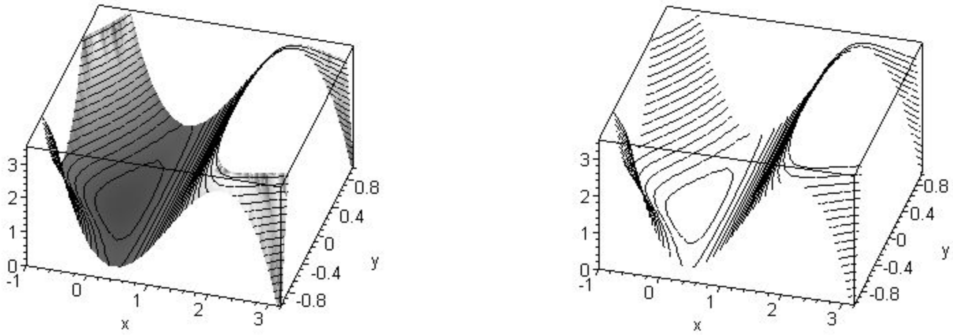

Figura 2: $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$

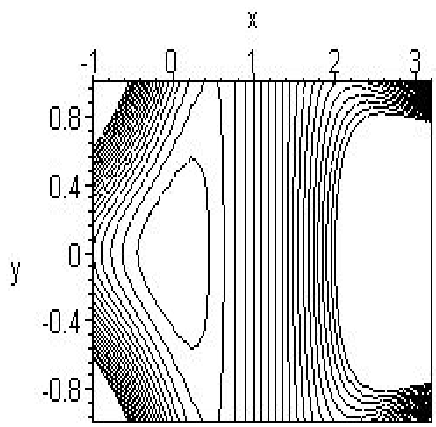

Figura 3: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$

3 Funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Nosso objetivo, agora, é verificar que o teorema 2.3 não pode ser generalizado para funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Para tanto vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$.

Verifica-se que $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f e, além disso, $(0, 0)$ é ponto de mínimo local, mas não absoluto, conforme Figura 2. Veja também as curvas de nível de f na Figura 3

$\square$

Observermos que no Exemplo 3.1 f é um polinômio de grau 5. A pergunta natural a se fazer é: será que existe um polinômio de grau menor que 5 que tenha um único pondo crítico, tal que este seja um ponto de mínimo local mas não seja absoluto? Um polinômio de grau quatro, nos parece pouco provável, portanto uma tentativa natural seria o seguinte exemplo.

Exemplo 3.2 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x, y) = x^2 + (1 - x) y^2$.

Observemos que $f(0,0) = 0$ é um mínimo local, mas não global conforme Figura 4. Porém diferentemente do exemplo 3.1, aqui temos dois ponto de sela em $(1, \pm\sqrt{2})$, conforme as curvas de nível da Figura 5.

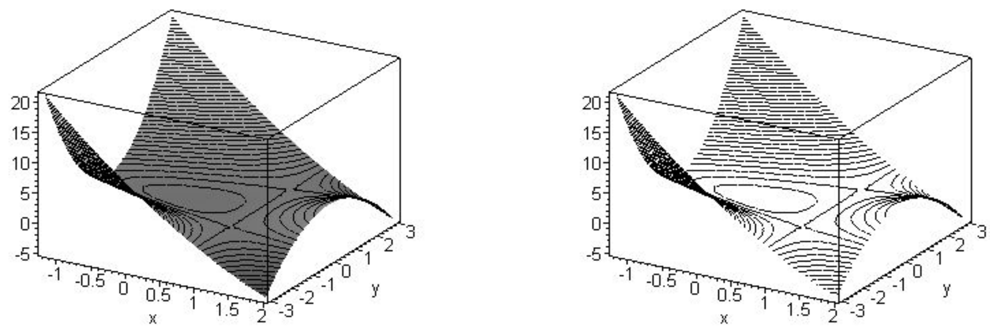

Figura 4: $f(x,y) = x^2 + (1-x)y^2$

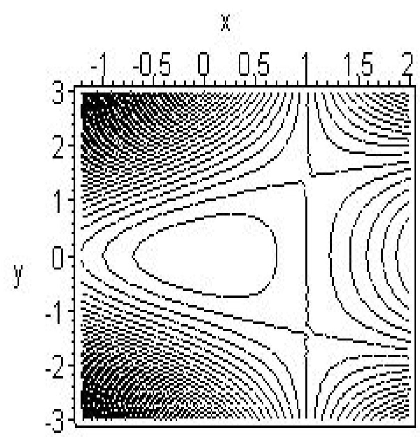

Figura 5: Curvas de nível de $f(x,y) = x^2 + (1-x)y^2$

Referências

[1] Fiqueiredo, Djairo G., *Análise I*, Editora LCT.

[2] Lima, Elon L., *Análise Real Vol.1 Funções de uma Variável*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2012.