Equações do Terceiro e do Quarto Graus

6 de fevereiro de 2002
UFMG
Departamento de Matemática
Francisco Satuf Rezende

1 Introdução

Estas notas contêm estudos dirigidos sobre equações do terceiro e do quarto graus que foram aplicados com sucesso para calouros do Curso de Matemática da UFMG, na disciplina Iniciação à Matemática. No final tem-se uma breve história sobre o assunto.

2 Estudo Dirigido sobre Equações do Terceiro Grau

Considere a equação polinomial

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0, \tag{1}$$

em que a, b e c são constantes reais.

Questão 1: Seja k uma constante. Faça a mudança de variável $z = x + k$ em (1), para obter

$$x^3 + (a + 3k)x^2 + (3k^2 + 2ak + b)x + k^3 + ak^2 + bk + c = 0. \tag{2}$$

Observe que para anular o coeficiente de x^2 em (2) devemos tomar

$$k = -\frac{a}{3}. \tag{3}$$

Questão 2: Substituindo (3) em (2), obtenha

$$x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0. \tag{4}$$

Pondo

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c,$$

(4) se escreve na forma

$$x^3 + px + q = 0, \tag{5}$$

em que p e q são constantes reais.

Questão 3: Pondo $x = u + v$ em (5), obtenha

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0. \tag{6}$$

Observemos que se acharmos u e v tais que

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^3 + v^3 + q & = & 0 \\ 3uv + p & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u^3 + v^3 & = & -q \\ & & \\ uv & = & -\dfrac{p}{3}, \end{array}\right. \tag{7}$$

$x = u + v$ seria solução de (5). Por outro lado, observemos que (7) pode ser escrito na forma abaixo.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^3 + v^3 & = & -q \\ u^3v^3 & = & -\dfrac{p^3}{27}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Questão 4: Vendo (8) como um sistema de duas equações, com incógnitas u^3 e v^3, justifique que u^3 e v^3 serão soluções da equação abaixo, com incógnita y.

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{9}$$

Questão 5: Mostre que as soluções de (9) são

$$y = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Questão 6: Pondo

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \tag{10}$$

conclua que

$$x = u + v \tag{11}$$

é solução de (5), em que

$$\begin{cases} u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{D} \\ \\ v^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{D} \end{cases} \tag{12}$$

Alguns autores colocam (11) e (12) na forma abaixo.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}. \tag{13}$$

Preferimos a formulação de (11) e (12), uma vez que em (12) temos claramente 3 possibilidades para u e 3 possibilidades para v, enquanto (13) pode esconder este fato.

A idéia geral para obtenção das raízes de (5) é achar as raízes cúbicas dos segundos membros de (12) no universo dos números complexos. Para tanto vamos utilizar o seguinte fato.

FATO: Se r é uma constante real, então a equação

$$u^3 = r$$

possui 3 soluções distintas dadas por

$$u_k = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ para } k \in \{0,1,2\}. \tag{14}$$

Observemos que em (14), $\sqrt[3]{r}$ é um número real.

Vamos classificar as soluções de (5), que depende do sinal de D, definido em (10). Vamos analisar, inicialmente, o caso $D = 0$. Neste caso, de (12) temos que $u^3 = -\dfrac{q}{2}$, cujas soluções são dadas por

$$u_k = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ para } k \in \{0,1,2\}.$$

Portanto as soluções de (5) são dadas por $x_k = u_k + v_k$ em que, devido a (7), $u_k v_k = -p/3$. Logo

$$v_k = \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2}}}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ para } k \in \{0,1,2\}. \tag{15}$$

Questão 7: Usando o fato que $D = 0$, mostre que

$$v_k = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right) = \overline{u_k}, \text{ para } k \in \{0,1,2\}.$$

Logo

$$x_k = u_k + v_k = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\cos\frac{2k\pi}{3}, \text{ para } k \in \{0,1,2\}, \tag{16}$$

são as soluções de (5).

Questão 8: Com auxílio de (16), conclua que, no caso $\boxed{D = 0}$, (5) possui uma raiz dupla

$$x_1 = x_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

e uma raiz simples

$$x_0 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Vamos estudar, agora, o caso $D < 0$. Neste caso $-\frac{q}{2}$ e $\sqrt{-D}$ são números reais. Logo devido a (12), podemos escrever u^3 na forma polar como se segue:

$$u^3 = \frac{-q}{2} + i\sqrt{-D} \quad = \quad \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta). \tag{17}$$

Questão 9: Utilizando (17), conclua que

$$\rho = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}, \quad \cos\theta = \frac{-q/2}{\rho} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{-D}}{\rho}. \tag{18}$$

Questão 10: Lembrando que $u_k v_k = -\frac{p}{3}$, mostre que

$$x_k = u_k + v_k = 2\sqrt[3]{\rho}\,\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3}, \text{ para } k \in \{0, 1, 2\}. \tag{19}$$

Questão 11: De (19), conclua que, no caso $\boxed{D < 0}$,

$$x_0 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}, \quad x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} \quad \text{e } x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta + 4\pi}{3}$$

são 3 raízes reais e distintas de (5), em que θ é dado por (18).

Finalmente, vamos analisar o caso $D > 0$. Neste caso

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}$$

é um número real. Pondo $r = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{D}$, temos que

$$u_k = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right).$$

Questão 12: Pondo $s = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{D}$, mostre que

$$rs = -\left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{20}$$

Questão 13: Lembrado que $u_k v_k = -\dfrac{p}{3}$, com auxílio de (20), mostre que

$$v_k = \sqrt[3]{s}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right).$$

Logo

$$\begin{aligned} x_k &= u_k + v_k = \\ &= (\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{s})\cos\tfrac{2k\pi}{3} + i\ (\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{s})\,\mathrm{sen}\tfrac{2k\pi}{3},\ \text{ para } k \in \{0,1,2\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Definamos A e B por

$$A = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{e} \quad B = \sqrt[3]{s} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}. \tag{22}$$

Observemos que A e B são números reais, devido ao fato de $D > 0$.

Questão 14: Com auxílio de (21) e (22), conclua que, no caso $\boxed{D > 0}$, (5) possui uma raiz real

$$x_0 = A + B$$

e duas raizes complexas conjugadas

$$x_1 = -\frac{1}{2}(A+B) + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B) \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{1}{2}(A+B) - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B),$$

em que A e B são números reais dados em (22).

3 Estudo Dirigido sobre Equação do Quarto Grau

Considere a equação

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \tag{23}$$

em que a,b,c e d são constantes reais.

Questão 1: Faça a mudança de variável $z = x + k$, para obter

$$\begin{aligned} &x^4 + (a+4k)x^3 + (3ak + b + 6k^2)x^2 + (3ak^2 + 2bk + 4k^3 + c)x + \\ &+k^4 + d + ck + ak^3 + bk^2 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Observemos que para anular o coeficiente de x^3 em (24) devemos tomar

$$k = -\frac{a}{4} \tag{25}$$

Questão 2: Substituindo (25) em (24) obtenha

$$x^4 + \left(-\frac{3a^2}{8} + b\right)x^2 + \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)x - \frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ac}{4} + d = 0. \tag{26}$$

Pondo

$$p = -\frac{3a^2}{8} + b, \quad q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c \quad \text{e} \quad r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ac}{4} + d,$$

(26) se escreve na forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{27}$$

em que p, q e r são constantes reais.

Questão 3: Verifique que (27) é equivalente a

$$\left(x^2+p\right)^2 = px^2 - qx + p^2 - r. \tag{28}$$

Questão 4: Com auxílio de (28), verifique que

$$(x^2+p+y)^2 = (p+2y)x^2 - qx + p^2 - r + 2py + y^2, \tag{29}$$

em que y pode ser qualquer número real.

A idéia é ver o segundo membro de (29) como um polinômio do segundo grau em x, de modo que ele possua uma raiz dupla. Para tanto, vamos achar y, tal que, o discriminante do segundo membro de (29) seja nulo. Mas este discriminante é

$$\begin{aligned}\Delta &= q^2 - 4(p+2y)\left(y^2+2py+p^2-r\right)\\ &= -8y^3 - 20py^2 + (-16p^2+8r)y + q^2 - 4p^3 + 4pr.\end{aligned}$$

Mas Δ é um polinômio do terceiro grau em y, portanto possui uma raiz real $y = y_0$. Substituindo $y = y_0$ em (29), obtemos

$$\left(x^2+p+y_0\right)^2 = (p+2y_0)(x-x_0)^2, \tag{30}$$

em que x_0 é a raiz dupla do segundo membro de (29).

Questão 5: Justifique que x_0 em (30) é real.

Pondo $R = p + 2y_0$, (30) é equivalente a

$$\begin{gathered}x^2+p+y_0 = \pm\sqrt{R}(x-x_0), \text{ para } R \geq 0\\ \text{ou}\\ x^2+p+y_0 = \pm i\sqrt{-R}(x-x_0), \text{ para } R < 0\end{gathered}$$

Mas as igualdades acima são equações do segundo grau em x. Resolvendo-se estas duas equações encontraremos as quatro raizes de (27).

4 História das Equações do Terceiro e do Quarto Graus

Por volta de 1700 AC, os babilônios já resolviam equações do segundo grau. Mas foi no final do século XV, com a Renascença, que a equação do terceiro grau foi efetivamente atacada.

Em 1494, Frei Luca Pacioli imprimiu, devido ao invento de Guttemberg, o livro *Summa de Aritimética e Geometria*. Ele afirmava ser impossível haver uma regra para resolver $x^3 + px = q$, que na época se lia *cubo e coisas igual a número.*

Scipione Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, provavelmente, por volta de 1526, foi o primeiro a resolver a equação do terceiro grau, mas nunca publicou nada. Comunicou a solução a Annibale Della Nave (futuro genro) a e a Antonio Maria Fiore (grande amigo). Fiore recebeu a regra mas não a demonstração.

Em 1535 Fiore desafia Nicolo Tataglia (Nicolo Fontana). O desafio consistia em lista de problemas trocadas entre os compedidores. Tais desafios científicos eram muito comuns naquela época.

Tartaglia (1499-1557) era eminente professor em Veneza. Tartaglia, então, desconfiou que deveria existir uma solução para equação do terceiro grau, uma vez que a lista proposta por seu rival, Fiore, só possuia problemas deste tipo. Nesse momento, Tartaglia resolve a equação do terceiro grau e vence o duelo com facilidade, pois os problemas que seu oponente deveria resolver estavam além da sua capacidade. Mas Tartaglia manteve sua solução em segredo.

Em 1539, um médico e cientista, rico e influente na época, Girolamo Cardano (1501-1576), obteve de Tartaglia a regra para se resolver a equação do terceiro grau, sob a forma de versos enigmáticos, sem demonstração. Mas Cardano jurou a Tartaglia que não dilvulgaria a regra.

Cardano e seu brilhante discípulo, Ludovico Ferrarri (1522-1557), demonstraram a regra de Tartaglia para solução de $x^3 + px = q$. Eles propuseram a mudança $x = y - a/3$ em $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, além de resolver 13 tipos de equações do terceiro grau, que hoje em dia são uma só. Pouco tempo depois Ferrari resolve a equação do quarto grau.

Cardano não podia publicar a solução de Tartaglia devido ao juramento, mas em 1542, ele e Ferrari obtiveram permissão de Della Nave para examinar os manuscritos de Ferro. Em 1545, Cardano publica o livro *Ars Magna*, que continha, entre outras coisas, a solução da equação do terceiro grau devido a Ferro. Isto provoca uma reação contrária de Tartaglia, que, em 1546, publica o livro *Quesiti et Inventioni Diverse*, no qual ataca duramente Cardano pela quebra do juramento.

De fevereiro de 1547 a julho de 1558, houve um duelo com 6 panfletos de Ferrari e 6 panfletos de Tartaglia e um debate final, devido ao qual Tartaglia perde seu emprego em Brescia e volta a Veneza, onde morreria no esquecimento nove anos mais tarde.

Para finalizar, deve ser dito que Raphael Bombelli, no seu livro de Álgebra de 1572, percebe de forma melhor os números complexos e conclui que a equação do terceiro grau possui três raízes e a do quarto possui quatro.

O exposto nesta seção foi baseado em [7] e [13], mas abaixo damos outras referências bibliográficas.

Referências

[1] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Edgar Blücher, pp 206-210, 1974.

[2] *Dictionary of Scientific Biography*, Scribner's Publ., 1970

[3] Fierez, M., *Giroramo Cardano (1501-1576)*, Birkhäuser, 1983.

[4] Gonçalves, A., *Introdução à Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, pp XI-XIV, 1979.

[5] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, 1972

[6] Knuden, C. A., *A Teoria das Equações Algébricas*, Revista do Professor de Matemática, vol. 7, 1985.

[7] Lima, E. L., *A Equação do Terceiro Grau*, Matemática Universitária, vol. 5, Sociedade Brasileira de Matemática, pp 9-23, 1987.

[8] Milles, C. P., *A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau*, Revista do Professor de Matemática, vol. , 1994.

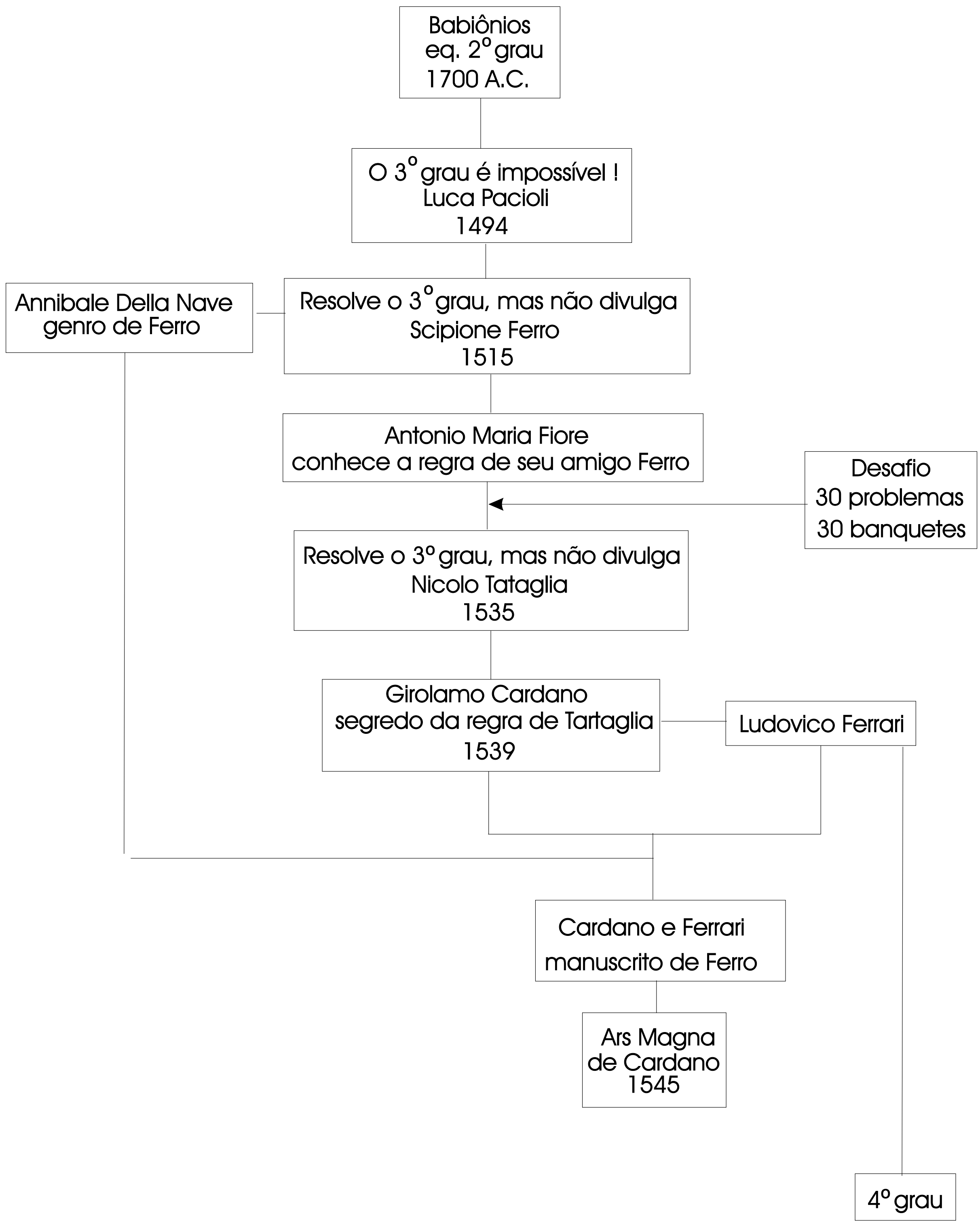
[9] Moreira, C. G. T. A., *Uma Solução das Equações do Terceiro e do Quarto Graus*, Revista do Professor de Matemática, vol. , 1994.

[10] Ore, O, *Cardano, the Gambling Scholar*, Princeton University,1953.

[11] Smith, D. E., *A Source Book im Mathematics*, MacGraw Hill, 1929.

[12] Tartaglia, N, *Quesiti et Inventioni Diverse*, publicação comemorativa de Nicolo Tartaglia, Brescria, 1959.

[13] van der Waerden, B. L., *A history of Algebra*, Springer Verlag,1985.


Babiônios
eq. 2º grau
1700 A.C.
O 3º grau é impossível !
Luca Pacioli
1494
Annibale Della Nave
genro de Ferro
Resolve o 3º grau, mas não divulga
Scipione Ferro
1515
Antonio Maria Fiore
conhece a regra de seu amigo Ferro
Desafio
30 problemas
30 banquetes
Resolve o 3º grau, mas não divulga
Nicolo Tataglia
1535
Girolamo Cardano
segredo da regra de Tartaglia
1539
Ludovico Ferrari
Cardano e Ferrari
manuscrito de Ferro
Ars Magna
de Cardano
1545
4º grau