

O Método da Bisseção

UFMG
Departamento de Matemática
Francisco Satuf

1 Introdução

Para fins de motivação considere um casal de crianças que brinca de adivinhar números inteiros entre 1 e 100. O Menino pensa um número e a menina deve descobri-lo. Inicialmente, a menina pergunta se o número é 50 e o menino responde que o número maior que 50. A menina, então pergunta se o número é 75 e o menino responde que o número é menor que 75. Em seguida a menina pergunta se o número é 67 e o menino responde que o número menor que 75. Observemos que a menina escolhe números que estão próximos do ponto médio dos intervalos possíveis. Com esse procedimento, em poucas tentativas, a menina irá descobrir o número que o menino pensou. O Método da Bisseção consiste em aproveitar a idéia dessa brincadeira para se resolver equações que contenham apenas uma variável.

Esse trabalho inicia-se descrevendo o Método da Bisseção, estudando sua convergência e analisando que classe de problemas que o esse método resolve. Confrontamos o Método da Bisseção com o Método de Newton devido ao grande sucesso desse último. Também estudamos o Teorema do Valor Intermediário, aos olhos do Método da Bisseção. O Teorema do Valor Intermediário é um teorema de existência de soluções de equações com uma incógnita. Porém ao analisarmos o Método da Bisseção sob as hipótese do Teorema do Valor Intermediário, vemos que esse método, não só implica nesse teorema, como exibe uma seqüência que converge para uma solução de tal equação. Outro fato notável é a equivalência do Método da Bisseção com o Postulado de Dedekind.

2 A convergência no Método da Bisseção

Vamos imaginar uma função como no gráfico da Figura 1. O Método da Bisseção consiste em: dados

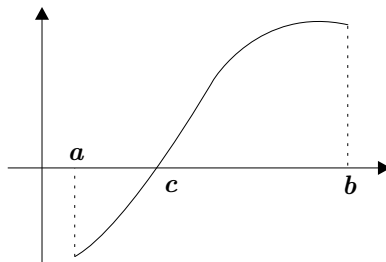


Figura 1: $f(a)f(b) < 0$.

uma função e três números a , b e *tolerância*, com $f(a)f(b) < 0$, encontrar c , tal que $|f(c)| < \textit{tolerância}$. Vejamos o seguinte esquema.

$x_1 = a, x_2 = b, y_1 = f(x_1), y_2 = f(y_2)$
 (*) $x_3 = (x_1 + x_2)/2, y_3 = f(x_3)$
 se $|y_3| < \textit{tolerância}$ então resposta é x_3
 se $y_2 y_3 < 0$ então $x_1 = x_3, y_1 = y_3$
 se não $x_2 = x_3, y_2 = y_3$
 repita o processo a partir de (*).

Observemos que, inicialmente, x_3 é o ponto médio do intervalo $[a, b]$. No passo seguinte uma das metades do segmento $[a, b]$ é desprezada e a outra é, então, dividida ao meio num novo ponto x_3 . O processo prossegue de forma iterativa.

Vejamos, agora, que o Método da Bisseção gera duas seqüências (a_n) e (b_n) , com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 a &= a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b \\
 b &= b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \dots \geq a \\
 f(a_n)f(b_n) &< 0, \forall n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Para tanto, iniciamos, definindo $a_1 = a$ e $b_1 = b$.

Vamos reescrever o algoritmo introduzindo as seqüências (a_n) e (b_n) , em que n representa a n -ésima iteração. Se $f(b_1)f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < 0$ defina $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ e $b_2 = b_1$, caso contrário defina $a_2 = a_1$ e

$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Prosseguimos o processo de maneira iterativa, isto é, se $f(b_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ defina

$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ e $b_{n+1} = b_n$, caso contrário defina $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Veja a figura 2

Observamos que o Método da Bisseção gera uma seqüência de intervalos encaixantes

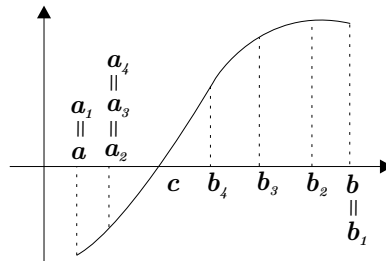


Figura 2: O Método da Bisseção.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \dots$$

Como o comprimento de cada intervalo é sempre a metade do intervalo anterior, podemos concluir que

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, concluímos que o Método da Bisseção é um caso particular do Teorema dos Intervalos Encaixantes, que pode ser encontrado em [2]. Este Teorema nos diz que se os intervalos são encaixantes e seus comprimentos tendem a zero, então existe um único $c \in [a, b]$, tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\},$$

ou equivalentemente, $c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$.

Retornando ao algoritmo, observamos que x_3 é, em cada passo, dado por $\frac{a_n + b_n}{2}$. Daí, temos que o Método da Bisseção define uma seqüência (c_n) dada por $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ que converge para c . Não é difícil verificar que

$$|c_n - c| < \frac{b - a}{2^{n-1}}.$$

3 Funcionalidade e Aplicabilidade do Método da Bisseção

Inicialmente, vamos responder a seguinte pergunta:

O Método da Bisseção Funciona?

Resposta: Nem sempre.

O resultado abaixo nos dá uma condição para a funcionalidade do método.

Teorema 3.1 *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então o Método da Bisseção gera uma seqüência (c_n) que converge para $c \in [a, b]$ e $f(c) = 0$.*

Demonstração: Tomemos (a_n) , (b_n) e (c_n) como no §2. Suponhamos que $f(c) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f(c) > 0$, pois caso contrário bastaria analisarmos a função $(-f)$. Como $f(c) > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > 0, \forall x \in [c - \delta, c + \delta]$ Como (a_n) é uma seqüência não decrescente convergindo para c , existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $c - \delta < a_r \leq c$. Analogamente, existe $s \in \mathbb{N}$, tal que $c \leq b_s < c + \delta$. Tomando $N = \max\{r, s\}$, temos que $a_N, b_N \in [c - \delta, c + \delta]$, o que implica que $f(a_N) > 0$ e $f(b_N) > 0$, donde $f(a_N)f(b_N) > 0$, o que é uma contradição (veja figura 3).

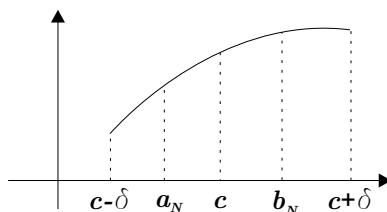


Figura 3: $f(a_r) > 0, f(a_s) > 0, f(b_N) > 0$ e $f(b_N) > 0$.

Este Teorema pode ser visto como conseqüência do seguinte resultado. ■

Teorema 3.2 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer. Se $f(a)f(b) < 0$, então o Método da Bisseção gera uma seqüência (c_n) que converge para $c \in [a, b]$ e, além disto, ou algum dos limites laterais em c não existe, ou são diferentes, ou $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = 0$.*

A demonstração deste teorema é análoga ao do teorema 3.1.

Do teorema 3.2, podemos ter outra utilidade para o Método da Bisseção além a de encontrar zeros de funções. O teorema 3.2 nos diz que o Método da Bisseção serve para localizar pontos de descontinuidade de funções. Para tanto, basta introduzirmos no algoritmo outro mecanismo de parada através da limitação do número de iterações, caso a tolerância não seja alcançada.

4 A convergência no Método de Newton

Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$. No caso $n = 1$, isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, o Método de Newton consiste em acharmos a interseção da reta tangente da figura 4 com o eixo das abscissas. Pondo $y = 0$ na equação da reta tangente, temos que $x = x_{n+1}$, isto é,

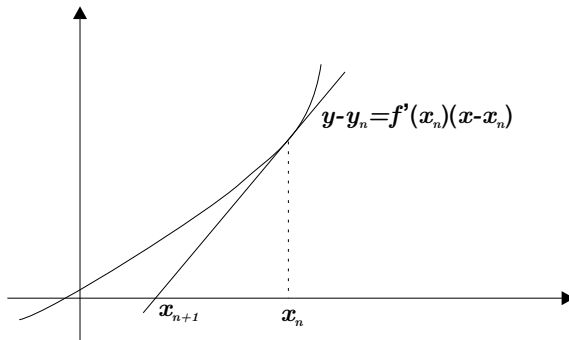


Figura 4: O Método de Newton.

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

o que nos fornece

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n).$$

Para generalizarmos o Método de Newton para $n > 1$, basta observarmos que x_{n+1} , x_n e $f(x_n)$ são vetores e $[f'(x_n)]^{-1}$ é o inverso da matriz jacobiana de f em x_n . As características da convergência são similares ao caso $n = 1$.

É muito comum se ouvir de estudantes e curiosos perguntas seguidas de uma exclamação:

O Método da Bisseção funciona?

O Método da Bisseção é bom?

Bom é o Método de Newton!

A primeira pergunta está respondida no parágrafo 3. Vamos comentar a exclamação e deixar a outra pergunta para depois. De [3], obtemos que se $f(c) = 0$ e existem $\delta > 0$ e $k > 0$, tais que

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq k < 1, \quad \forall x \in [c - \delta, c + \delta], \quad (1)$$

então o Método de Newton gera uma seqüência (x_n) , com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Ainda de [3], temos que o Método de Newton não é somente bom, na realidade, ele é ótimo: se existem $A, B, \delta > 0$, tais que

$$|f''(x)| \leq A \text{ e } |f'(x)| \geq B, \quad \forall x \in [c - \delta, c + \delta],$$

então

$$|x_n - c| \leq \frac{A}{2B} |x_n - c|^2, \quad (2)$$

que é chamada de convergência quadrática. Pondo $K = \frac{A}{2B}$, em (2), temos que

$$|x_n - c| \leq K^{2^n - 1} |x_1 - c|^{2^{n-1}},$$

o que nos dá uma convergência rapidíssima, se K e $|x_1 - c|$ são pequenos.

5 Bisseção versus Newton

Do §4, temos que no Método de Newton

$$|x_n - c| \leq K^{2^{n-3}-1} |x_1 - c|^{2^{n-2}},$$

e, portanto, ele é, em geral, bem mais rápido que o Método da Bisseção, pois de acordo com o §2

$$|c_n - c| \leq \frac{b - a}{2^{n-1}}.$$

Por outro lado o Método da Bisseção pode ser aplicado para funções não diferenciáveis e, além disto, pode ser utilizado para localizar pontos de descontinuidade de uma função. Mas ressaltamos que uma comparação mais detalhada desses Métodos nos parece muito difícil. Esclarecemos que só procedemos a tal comparação devido à grande popularidade do Método de Newton, que, como veremos, pode ser facilmente generalizado, em contraposições ao Método da Bisseção.

Exemplo: $f(x) = \arctg x$, $x_0 = 2$ no Método de Newton e intervalo $[-9, 2]$ no Método da Bisseção.

n	Newton		Bisseção	
	x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$
1	-3, 535743590	-1, 295169059	-3, 500000000	-1, 292496668
2	13, 95095909	1, 499239053	-0, 750000000	-0, 6435011088
3	-279, 3440666	-1, 567216527	0, 625000000	0, 5585993153
4	122016, 9989	1, 570788131	-0, 625000000	-0, 06241881000
5	-0, 2338600418 10 ¹¹	-1, 570796327	0, 281250000	0, 2741674511
6	0, 8590766658 10 ²¹	1, 570796327	0, 1093750000	0, 1089419570
7	-0, 1159267666 10 ⁴³	-1, 570796327	0, 02343750000	0, 02343320988
8	0, 2110995573 10 ⁸⁵	1, 570796327	-0, 01953125000	-0, 01952876704
9	-0, 6999943298 10 ¹⁶⁹	-1, 570796327	0, 001953125000	0, 001953122516
10	0, 7696777310 10 ³³⁸	1, 570796327	-0, 008789062500e	-0, 008788836199
11	-0, 9305457284 10 ⁶⁷⁶	-1, 570796327	-0, 003417968750	-0, 003417955440
12	0, 1360176655 10 ¹³⁵³	1, 570796327	-0, 0007324218750	-0, 0007324217440
13	-0, 2906099706 10 ²⁷⁰⁵	-1, 570796327	0, 0006103515625	0, 0006103514867
14	0, 1326602765 10 ⁵⁴¹⁰	1, 570796327	-0, 00006103515625	-0, 00006103515617
15	-0, 2764405023 10 ¹⁰⁸¹⁹	-1, 570796327	0, 0002746582031	0, 0002746581962
16	0, 1200392363 10 ²¹⁶³⁸	1, 570796327	0, 0001068115234	0, 0001068115230
17	-0, 2263426126 10 ⁴³²⁷⁵	-1, 570796327	0, 00002288818359	0, 00002288818359
18	0, 8047343251 10 ⁸⁶⁵⁴⁹	1, 570796327	-0, 00001907348633	-0, 00001907348633
19	-0, 1017243513 10 ¹⁷³⁰⁹⁹	-1, 570796327	0, 1907348633 10 ⁻⁵	0, 1907348633 10 ⁻⁵
20	0, 1625435480 10 ³⁴⁶¹⁹⁷	1, 570796327	-0, 8583068848 10 ⁻⁵	-0, 8583068848 10 ⁻⁵
21	-0, 4150107514 10 ⁶⁹²³⁹³	-1, 570796327	-0, 3337860107 10 ⁻⁵	-0, 3337860107 10 ⁻⁵
22	0, 2705444149 10 ¹³⁸⁴⁷⁸⁶	1, 570796327	-0, 7152557373 10 ⁻⁶	-0, 7152557373 10 ⁻⁶
23	-0, 1149733069 10 ²⁷⁶⁹⁵⁷²	-1, 570796327	0, 5960464478 10 ⁻⁶	0, 5960464478 10 ⁻⁶
24	0, 2076413878 10 ⁵⁵³⁹¹⁴³	1, 570796327	-0, 5960464478 10 ⁻⁷	-0, 5960464478 10 ⁻⁷
25	-0, 6772479871 10 ¹¹⁰⁷⁸²⁸⁵	-1, 570796327	0, 2682209015 10 ⁻⁶	0, 2682209015 10 ⁻⁶
26	0, 7204690397 10 ²²¹⁵⁶⁵⁷⁰	1, 570796327	0, 1043081284 10 ⁻⁶	0, 1043081284 10 ⁻⁶
27	-0, 8153621044 10 ⁴⁴³¹³¹⁴⁰	-1, 570796327	0, 2235174179 10 ⁻⁷	0, 2235174179 10 ⁻⁷
28	0, 1044289527 10 ⁸⁸⁶²⁶²⁸¹	1, 570796327	-0, 1862645149 10 ⁻⁷	-0, 1862645149 10 ⁻⁷
29	-0, 1713017194 10 ¹⁷⁷²⁵²⁵⁶¹	-1, 570796327	0, 1862645149 10 ⁻⁸	0, 1862645149 10 ⁻⁸
30	0, 4609388578 10 ³⁵⁴⁵⁰⁵¹²¹	1, 570796327	-0, 8381903172 10 ⁻⁸	-0, 8381903172 10 ⁻⁸
31	-0, 3337386614 10 ⁷⁰⁹⁰¹⁰²⁴²	-1, 570796327	-0, 3259629011 10 ⁻⁸	-0, 3259629011 10 ⁻⁸
32	0, 1749576418 10 ¹⁴¹⁸⁰²⁰⁴⁸⁴	1, 570796327	-0, 6984919310 10 ⁻⁹	-0, 6984919310 10 ⁻⁹

Solicitamos ao leitor se convencer geometricamente que as retas tangentes no Método de Newton estão tendendo a horizontais e, portanto, $|x_n|$ fica muito grande, vide (1). por outro lado o Método de Newton com $x_0 = 1$ com 4 iterações fornece $f(x_4)$ da ordem de 10^{-9} . Já o Método da Bisseção vai convergir para uma raiz, uma vez que as hipóteses do teorema 3.1 são atendidas.

6 O Método da Bisseção e o Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário é um dos pilares do estudo de funções contínuas. O Método da Bisseção fornece uma demonstração simples para o Teorema do Valor Intermediário, o qual enunciaremos a seguir.

Teorema 6.1 *Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e y está entre $F(a)$ e $F(b)$, então existe um único $c \in [a, b]$, tal que $F(c) = y$.*

Para demonstrar este teorema basta aplicar o teorema 3.1 à função $f(x) = F(x) - y$.

Ressaltamos que o Método da bisseção não só implica no Teorema do Valor Intermediário, como fornece uma seqüência que converge para o número c da tese deste teorema.

7 O Método da Bisseção e o Postulado de Dedekind

Este assunto foi deixado para o final, porque ele não possui um caráter numérico, visando o cálculo de soluções de equações.

Devemos dizer o que é o Postulado de Dedekind, mas antes necessitamos de definir cota superior e supremo de um conjunto. Uma cota superior de um conjunto $A \neq \emptyset$ é um número m , tal que $x \leq m$, $\forall x \in A$. O supremo de um conjunto A é a menor das cotas superiores de A e é denotado por $\sup A$.

Exemplos:

$$A = [1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \leq 3\}.$$

$3, \pi, \sqrt{10}, 4, 5, 7/2$, etc. são cotas superiores de A . Mas o supremo de A é 3 ou, simplesmente,

$$\sup A = 3.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\sup B = \sqrt{2}$$

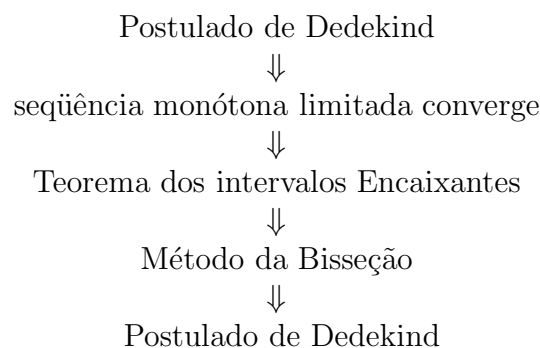
$$C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$\sup C = \sqrt{2}$$

Note que no último exemplo $C \subset \mathbb{Q}$, mas $\sup C \notin \mathbb{Q}$.

Dizemos que um conjunto satisfaz ao Postulado de Dedekind, se todo subconjunto com cota superior possui supremo. O nome deste postulado é em homenagem a Richard Dedekind, que em 1901 formalizou a construção dos números reais, a qual pode ser encontrada na primeira parte de [1].

O que queremos analisar são as implicações abaixo



As duas primeiras implicações podem ser encontradas em [2] ou [3]. A terceira implicação já foi discutida nestas notas. Já a última implicação quer dizer que se num corpo ordenado K vale o teorema 3.2, então ele satisfaz o postulado de Dedekind. Um corpo ordenado pode ser entendido como um conjunto que tem todas as propriedades de \mathbb{Q} , e sua definição rigorosa pode ser vista em [2] ou [3].

Vejamos como o teorema 3.2 implica no Postulado de Dedekind. Seja A um subconjunto não vazio de K , que possua cota superior. Sejam b uma cota superior de A e a um elemento de A . Denotando $[a, b] = \{x \in K : a \leq x \leq b\}$, definamos $f : [a, b] \rightarrow K$, por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \text{ é cota superior de } A \text{ e } x \notin A \\ -1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $b \notin A$, e portanto $f(a)f(b) < 0$. Logo, o Método da Bisseção produz seqüências (a_n) e (b_n) , com $f(a_n) = -1$ e $f(b_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas pelo teorema 3.2, ambas convergem para um número $c \in [a, b] \subset K$.

Vejamos, inicialmente, que c é uma cota superior de A , pois caso contrário existiria $x \in A$ com $c < x$, e portanto existiria $r \in \mathbb{N}$, tal que $c \leq b_r < x$, mas isto é uma contradição. De fato, como $f(b_r) = 1$, b_r seria uma cota superior de A , o que implicaria que $x \notin A$.

Vejamos, agora, que c é a menor cota superior. Suponha que $d < c$ fosse cota superior de A . Seja $s \in \mathbb{N}$, tal que $d < a_s \leq c$. Se $a_s \in A$, d não poderia ser cota superior de A . Logo, $a_s \notin A$. Como d é cota superior de A , a_s seria, também, cota superior de A . Portanto, $f(a_s) = 1$, o que é contradição.

8 Considerações Finais

Comparando o Método de Bisseção com o Método da Newton, observamos que este último possui implementação computacional tão simples quanto o primeiro. Vimos que o Método de Newton pode ser muito mais eficiente que o Método da Bisseção, porém este último também é rápido, uma vez que ele gera uma seqüência (c_n) que converge para a solução c na forma

$$|c_n - c| < \frac{b - a}{2^{n-1}},$$

em que $[a, b]$ é o intervalo dado inicialmente.

Enquanto o Método de Newton necessita de funções diferenciáveis, o Método da Bisseção pode ser aplicado para funções contínuas. Além disto, o Método da Bisseção pode ser utilizado (veja teorema 3.2) para localizar ponto de descontinuidade de uma função. Mas, por outro lado, enquanto a implementação computacional do Método de Newton para funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n é trivial, o mesmo não ocorre para o Método da Bisseção, na realidade, isso nos parece uma tarefa difícil.

Do ponto de vista teórico, vimos que o Método da Bisseção fornece uma demonstração alternativa simples para o Teorema do Valor Médio. Finalizamos dizendo que embora o Método da Bisseção seja rudimentar e intuitivo, é gratificante saber que ele é equivalente ao Postulado de Dedekind, o qual é fundamental no entendimento dos números reais.

Referências

- [1] Dedekind, R., *Enssays on The Theory of Numbers: I Continuity and Irrational Numbers, II The Nature and Meaning of Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [2] Figueiredo, D. G., *Análise I*, segunda edição, L.T.C., 1996.
- [3] Lima, E. L., *Analise*, vol. 1, Coleção Matemática Universitária - S.B.M., 1989.